UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA

PROGRAMA DE MESTRADO PROSSIONAL

EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Danivaldo Guedes Vulcão

Uma Sequência Didática sobre Análise Combinatória com a Utilização do Jogo de Xadrez

Abaetetuba-Pa

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ABAETETUBA

PROGRAMA DE MESTRADO PROSSIONAL EM

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Danivaldo Guedes Vulcão

Uma Sequência Didática sobre Análise Combinatória com a Utilização do Jogo de Xadrez

Trabalho de conclusão de curso apresentado a Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa

Abaetetuba-PA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBDSistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V991s Vulcão, Danivaldo.
Uma sequência didática sobre análise combinatória coma utilização do jogo de xadrez / Danivaldo Vulcão. — 2022.
61 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Manuel de Jesus dos SantosCosta
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba,2022.

1. Ensino de Matemática. 2. Jogo de Xadrez. 3. Análise Combinatória. I. Título.

CDD 511.6

DANIVALDO GUEDES VULCÃO

Uma Sequência Didática sobre Análise Combinatória com a Utilização do Jogo de Xadrez

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional do Campus de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará, com requisito final para a obtenção do título de Mestre em Matemática

BANCA EXAMINADORA

Manuel de Jesus dos S. Costa.

Orientador: Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa (PROFMAT/ABAETETUBA)

Antonio Maia de Jesus Chaves Neto

Membro Externo: Prof. Dr. Antônio Maia de Jesus Chaves Neto (UFPA/BELÉM)

Rômulo Correa Lima

Membro Interno: Prof. Dr. Rômulo Correa Lima (PROFMAT/ABAETETUBA)

Rubenvaldo Monteiro Pereira

Membro Externo: Prof. Dr. Rubenvaldo Monteiro Ferreira (FAMAT/CUTINS/UFPA)

Dedico este trabalho a meus pais Arivone Guedes Vulcão e Valdomiro Gaia Vulcão que me proporcionaram uma boa educação e em memória da minha tia Maria Francisca Gaia Vulcão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu Criador, por ser a razão da minha vida e por ter me concedido uma oportunidade de concluir mais uma etapa na minha formação acadêmica.

Aos meus pais ARIVONE GUEDES VULCÃO e VADOMIRO GAIA VULCÃO que sempre me apoiaram nos meus estudos e contribuíram significativamente na minha educação.

À DANIELA MARIA BAÍA DA SILVA, por ter me incentivado antes e após a minha ingressão no Profmat, e por sacrificar alguns fins de semanas pra me acompanhar nos estudos.

Ao meu amigo JOCIEL MACHADO NUNES, que me ajudou durante este período de estudo, compartilhando seu conhecimento comigo por meio de aulas, livros e apostilas.

À diretora CHRYSTIANNE DA SILVA CORREA, pelo carinho, e compreensão por ter permitido e viabilizado a aplicação da sequência didática na escola Agropalma.

Ao professor e colega de trabalho MAURÍCIO DOS SANTOS LOBATO que contribuiu significativamente com suas ideias e experiências na elaboração deste trabalho.

Aos professores e colegas de curso que foram parceiros e partilharam de suas experiências e conhecimentos proporcionando aulas enriquecedoras.

Ao meu orientador Prof.: Dr. MANUEL DE JESUS DOS SANTOS COSTA, pela “paciência de Jó”, pelas orientações e por ser incentivador de seus alunos.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma sequência didática sobre o estudo de Análise Combinatória, com o auxílio do jogo de xadrez como ferramenta educacional, visando melhorar o processo de ensino aprendizagem em matemática; a relevância deste trabalho está no fato deste conteúdo se fazer presente na grade curricular do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e os alunos apresentarem uma certa dificuldade em sua assimilação e até mesmo uma aversão a este conteúdo, por esta razão, aulas alternativas como a utilização de jogos se fazem necessárias, para tornar este momento mais atrativo e dinâmico melhorando a qualidade do ensino, e consequentemente obtendo uma resposta na aprendizagem. Além disso, o conteúdo de Análise Combinatória tem a sua importância para a formação dos alunos, pois estuda vários formas e métodos que possibilitam a resolução de problemas referentes a contagem e auxilia nas tomadas de decisões. Para a realização deste trabalho, foram realizadas duas avaliações durante este processo, a primeira ocorreu de forma tradicional, com o objetivo de verificar o grau de entendimento da turma, em relação ao conteúdo de Análise Combinatória. A segunda avaliação ocorreu após o ensino da metodologia com xadrez, com o intuito de verificar o desempenho dos alunos referente às duas avaliações, os dados obtidos foram coletados e registrados por meio de gráficos, também foram apresentados resultados de pesquisas em escolas que adotaram o jogo de xadrez em seu sistema pedagógico, mostrando que a utilização do jogo não somente traz benefícios para matemática, como também para as diversas áreas de conhecimento.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Jogo de Xadez. Análise Combinatória.

ABSTRACT

This work aims to present a didactic sequence on the study of Combinatorial Analysis, with the aid of the game of chess as an educational tool, aiming to improve the teaching-learning process in mathematics; The relevance of this work lies in the fact that this content is present in the curriculum of the Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), and the students present some difficulty in its assimilation and even an aversion to this content, for this reason, alternative classes how the use of games is necessary, to make this moment more attractive and dynamic, improving the quality of teaching, and consequently obtaining a response in learning. In addition, the content of Combinatorial Analysis has its importance for the training of students, as it studies various forms and methods that enable the resolution of problems related to counting and assists in decision making. To carry out this work, two evaluations were carried out during this process, the first took place in a traditional way, with the objective of verifying the degree of understanding of the class, in relation to the content of Combinatorial Analysis. The second evaluation took place after teaching the methodology with chess, in order to verify the performance of the students regarding the two evaluations, the data obtained were collected and recorded through graphs, results of research in schools that adopted the game were also presented. of chess in its pedagogical system, showing that the use of the game not only brings benefits to mathematics, but also to the different areas of knowledge.

Keywords: Teaching Mathematics. Chess Game. Combinatorial Analysis.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os jogos sempre estiveram presente na vivência humana em sua maioria como meio de divertimento e lazer, proporcionando uma relação do indivíduo com o meio que o cerca e com as pessoas; no contexto educacional os jogos são inseridos de forma física ou virtual por meio de programas, aplicativos e plataformas, e quando bem utilizados e direcionados pelo educador pode se transformar numa ferramenta fundamental na construção do conhecimento (TASCHETTO, 2004).

> A educação moderna volta-se cada vez mais para encerrar o ciclo do ensino por adestramento, pela aprendizagem consciente, onde o aluno é estimulado continuamente a aprimorar a sua capacidade de pensar. Neste particular, o xadrez é uma atividade primordial por excelência, não só por atender às características de desporto estimulando entre outros o espírito competitivo e a autoconfiança, como adequando-se sobremaneira à exigências da Educação moderna (REZENDE, 2013, p. 8).

Os jogos, portanto, são de suma importância para melhorar o processo de ensino aprendizagem de Matemática. Neste contexto que se insere o jogo de xadrez, onde a cada fase do fundamental os alunos poderam assimilar novos conceitos matemáticos relacionando-os com o jogo, mesmo nas séries finais, os professores poderam interligar determinados assuntos de matemática com o xadrez, isso contribui para uma melhor aprendizagem já que os alunos não somente verão os conteúdos de forma abstrata, pois se utilizarão do jogo como fonte concreta e lúdica além de indicar uma eficiência no processo de socialização e no cultivo de valores. O xadrez também contribui para o estímulo às inteligências múltiplas melhorando a concentração, a análise e percepção das situações, a paciência, estimulando a criatividade e o raciocínio lógico-matemático (POMPEU, 2009).

A princípio o presente trabalho mostrará uma breve parte histórica do xadrez acompanhada das regras do jogo, e em seguida exemplos de como relacionar a matemática com o xadrez, além de mostrar dados de escolas que obtiveram sucesso em adotar projetos de xadrez como ferramenta para o ensino da matemática.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Neste capítulo será abordado a parte histórica do jogo de xadrez, tal como a sua possível origem e seu desenvolvimento ao longo dos anos. Existe uma lenda sobre a origem do jogo que diz que o xadrez foi inventado na Índia, por um sábio chamado Sissa ou Sessa como meio de entretenimento a um rei que havia perdido um filho. O rei teria ficado tão feliz que permitiu ao inventor escolher o que ele desejasse como pagamento. Sissa então, pediu um grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro e para cada casa seguinte os valores deveriam ser dobrados. O que caracteriza uma soma de uma progressão geométrica.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$$

Como o tabuleiro de xadrez possui sessenta e quatro casas e o primeiro termo corresponde a um grão de trigo, temos o termo inicial elevado à zero e o último termo elevado a sessenta e três. Note que a razão é dois, o primeiro termo é igual a um e conhecendo o número de termos pode-se aplicar a fórmula da soma de uma progressão geométrica (MORGADO, CARVALHO, 2015):

$$\mathrm{S_n} = \frac{\mathrm{a_1(q^n-1)}}{\mathrm{q-1}} \qquad (\mathbf{1})$$

$$s_{64} = \frac{1(2^{64} - 1)}{2 - 1}$$

$$s_{64} = 2^{64} - 1$$

$$s_{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \blacksquare$$

Este é o valor exorbitante de grãos de trigo que deveria ser pago a Sissa.

> Para se ter uma ideia da grandeza deste número, caso uma pessoa deseje contar a partir de 1 até o final (1, 2, 3, etc.), levando apenas um segundo para contar o número seguinte, trabalhando 24 horas por dia, sem parar até o final, seriam necessários 58 454 204 609 séculos, isto é, quase sessenta bilhões de séculos (REZENDE, 2013, p. 13).

A origem precisa do xadrez é desconhecida, no entanto o mais provável é que o jogo tenha surgido na Índia por volta do século V, em seguida se espalhou para o mundo árabe e chegou a Europa, o que faz um paralelo com o surgimento dos algarismos Hindu-Arábicos, já que estes também foram uma invenção dos Hindus e que foi difundido pelos Árabes até a Europa Ocidental durante a Idade Média. A partir do século XV o xadrez ganha bastante popularidade e surgem os primeiros jogadores profissionais. Em 1851 foi estabelecido um código de regras que unificou o jogo de xadrez tornando a base das regras atuais, em 1886 começaram a surgir os primeiros campeonatos mundiais de xadrez, no qual o enxadrista do império Austríaco Wilhelm Steinitz se tornou o primeiro campeão mundial de xadrez. Em 1924 foi estabelecido a Federação Internacional de Xadrez (FIDE) que é responsável pela organização das competições a nível internacional, mas que também incentiva e promove o xadrez escolar, fazendo do esporte uma ferramenta educacional (TASCHETTO, 2004).

Com um grande número de jogadores ingressando no esporte houve a necessidade de quantificar a força de um jogador afim de que eles fossem organizados de forma mais justa quanto aos torneios e a títulos de mestres. Com o auxílio da matemática foi possível qualificar os enxadristas e separá-los em faixas de ranting Elo, criado pelo físico húngaro-americano Arpad Emrick Elo. Em 1972, o mundo enxadrístico presenciou um dos maiores embates durante o período da Guerra Fria, onde o jogo de xadrez foi palco de batalha entre as duas maiores potências da época. A União Soviética dominava o esporte e todos os campeões mundiais do período pós segunda guerra eram soviéticos, no entanto o americano Robert James Fischer derrotou Boris Spassky pelo campeonato mundial de xadrez (FIGUEIREDO, 2014).

Em 1996 com a introdução dos computadores, o mundo acompanhou um supercomputador da International Business Machines (IBM) construído pra jogar contra o atual campeão mundial da época, Garry Kasparov; no primeiro confronto o russo levou a melhor, mas em 1997 o computador Deep Blue havia sido atualizado, e finalmente a máquina venceu o ser humano, provando ter uma enorme capacidade de cálculo, sendo capaz de analisar até $2 . 10^8$ de jogadas por segundo. O século XXI trouxe a geração das engines, ou seja, programas de computadores superpoderosos capazes de calcular e decidir movimentos no jogo de xadrez, o StockFish e AlphaZero são alguns exemplos, que impediram o homem de fazer frente a estas máquinas, no entanto, profissionais e amadores tem aprendido muito com as análises de partidas feitas por estas engines.

3 REGRAS DO XADREZ

Neste capítulo serão abordadas as regras básicas do jogo de xadrez, tal como o tabuleiro as notações algébricas, a quantidade e o movimento das peças.

3.1 Regras Básicas

O jogo de xadrez é praticado por duas pessoas em um tabuleiro de 64 casas com 32 peças, sendo 16 peças pra cada jogador, as peças possuem nomes e movimentos distintos e a quantidade delas é mostrada na Tabela 1.

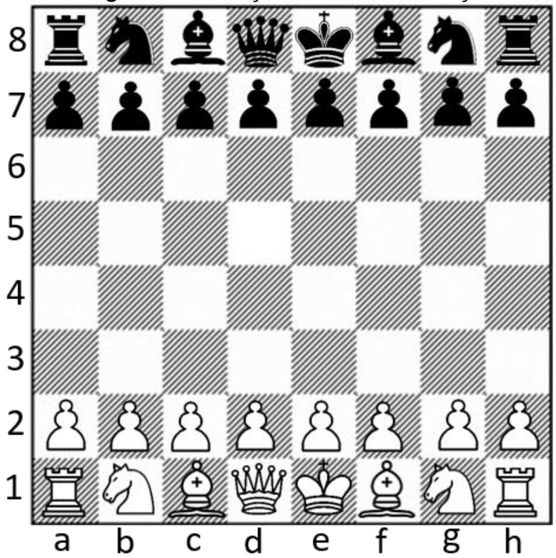
Tabela 1- Quantidade de peças por jogador

QUANTIDADE DE PEÇAS POR JOGADOR		
Nome	Peças	Quantidades
Peão	♟	8
Torres	♜	2
Cavalo	♞	2
Bispo	♝	2
Rainha	♛	1
Rei	♚	1

Fonte: Autoria Própria

O tabuleiro de xadrez é dividido em oito colunas representadas pelas letras minúsculas: a, b, c, d, e, f, g, h. E por oito linhas representadas pelos números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Existem dezesseis peças na coloração branca que sempre deverão ocupar as linhas 1 e 2, enquanto as outras dezesseis peças na cor preta ocuparão as linhas 7 e 8, desta forma estará configurada a posição inicial das peças visualizadas na Figura 1.

Figura 1- Posição Inicial das Peças



Fonte: Autoria Própria

O objetivo do jogo é dá o xeque-mate ao rei do oponente, ou seja, atacar o rei do adversário de forma que ele não tenha casa de fuga e nem disponha de alguma peça pra se colocar na frente do ataque, quando o rei está sob ataque diz-se que está em xeque, e quando o ataque não pode ser evitado denomina-se xeque mate e é o fim da partida, outro modo de se obter a vitória acontece quando o jogador adversário desiste durante a partida, julgando está numa posição completamente perdida.

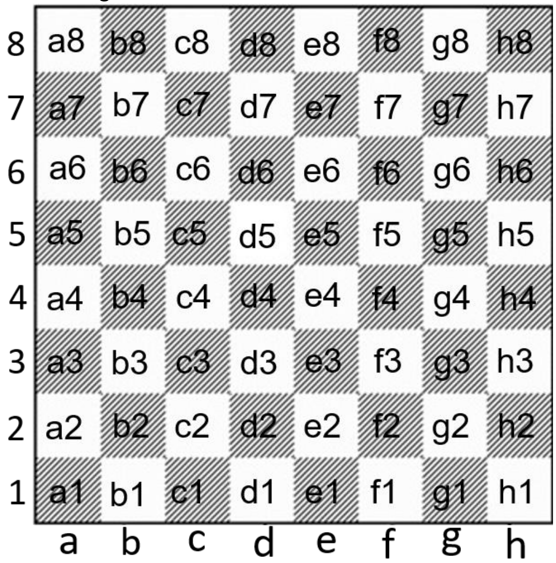
Os empates, por sua vez, podem acontecer por insuficiência de material, por afogamento que é quando o rei não está sendo atacado, mas não possui casas de fuga ou outra peça pra mover; outra maneira é se ambos jogadores concordarem no empate ou também quando se repete por três vezes o mesmo lance na partida.

As regras que vigoram atualmente foram aprovadas no 77º congresso da Federação Internacional de Xadrez (FIDE) realizado na Alemanha em 2008 e nela contém todos os pormenores do jogo desde o controle do tempo até a acomodação dos jogadores (ALEMANHA, 2008).

3.2 Notação Algébrica

É o meio pelo qual as partidas de xadrez são registradas. Existem muitas formas de se fazer as anotações dos lances pra que eles possam ser reproduzidos e estudados, no entanto, a forma que é mais utilizada e adotada pela Federação Internacional de Xadrez é a notação algébrica. Este sistema permite que cada casa seja identificada por uma letra e um número como mostra a Figura 2.

Figura 2- Nomenclatura das Casas



Fonte: Autoria Própria

Além disso cada peça do xadrez é identificada por uma letra maiúscula com exceção dos peões, que são representados pelas próprias casas do tabuleiro. As letras pelas quais as peças são representadas correspondem a inicial dos seus nomes em qualquer idioma que o jogador preferir. A Tabela 2 mostra como as notações são definidas em português.

Tabela 2- Notação das Peças

NOTAÇÃO DAS PEÇAS	
Nome	Notação
Rei	R
Dama	D
Torre	T
Bispo	B
Cavalo	C

Fonte: Autoria Própria

Desta forma, para se anotar um lance, o jogador terá que escrever a inicial da peça movida com letra maiúscula juntamente com a casa para onde a peça se moveu com letra minúscula. E quando houver um lance com captura, uma letra “x” deverá ser adicionado logo após a inicial da peça movida como registra-se na Tabela 3, caracterizando uma disposição dos primeiros lances de uma partida.

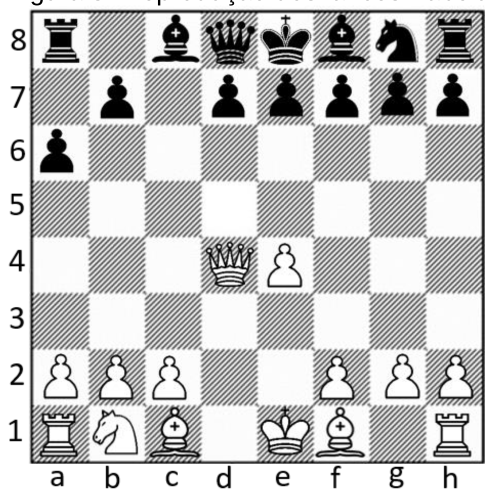
Tabela 3- Anotações da Partida

ANOTAÇÕES DA PARTIDA	
Brancas	Negras
e4	c5
Cf3	Cc6
d4	cxd4
Cxd4	Cxd4
Dxd4	a6

Fonte: Autoria Própria

A Tabela 3 contém informações dos primeiros cinco lances de uma partida, podendo observar letras e números cooperando simultaneamente para registrar o que ocorreu. Assim, as partidas podem ser reproduzidas em um tabuleiro mostrado na Figura 3, o qual é uma reprodução na prática da Tabela 3.

Figura 3- Reprodução dos lances Tabela 3



Fonte: Autoria Própria

Existem vários sinais que podem ser utilizados durante as anotações de uma partida, com o objetivo de descrever determinados movimentos e situações do jogo, tais sinais são registrados na Tabela 4.

Tabela 4- Sinais Convencionais

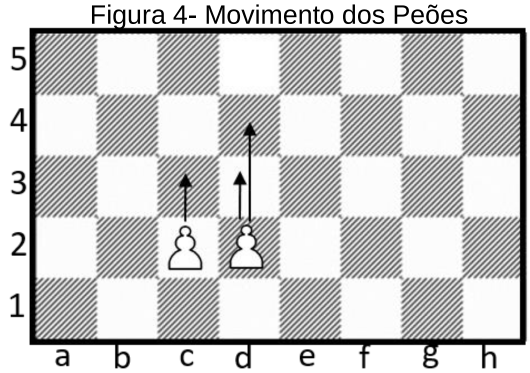
SINAIS CONVENCIONAIS	
Captura	X
Xeque	+
Xeque-mate	++
Lance Bom	!
Lance Muito Bom	!!
Lance Ruim	?
Lance Muito Ruim	??
Roque Pequeno	0-0
Roque Grande	0-0-0
Abandono de Partida	Abd.
“Em Passant”	e.p.
Vitória de brancas	1x0
Vitória de Negras	0x1
Empate	=

Fonte: Rezende, 2013, p. 59.

3.3 Movimento das Peças

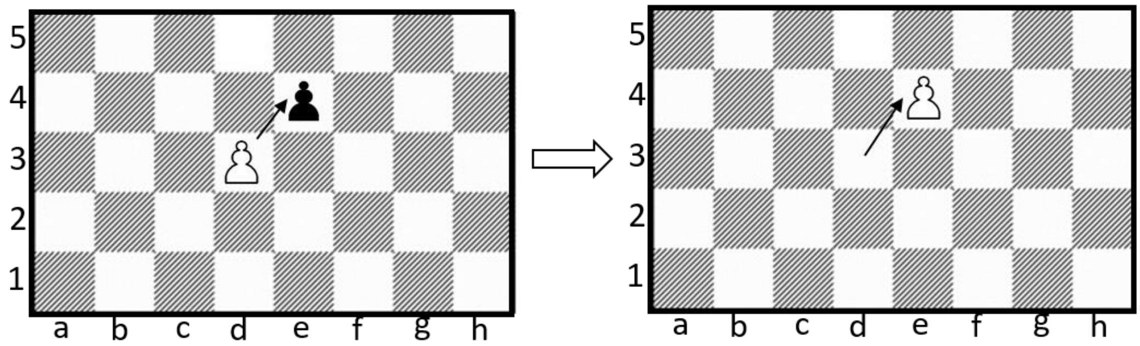
O Peão movimenta-se apenas pra frente, no entanto, no primeiro lance de cada peão o jogador pode escolher se ele o moverá uma ou duas casas, a partir deste movimento o peão só poderá avançar uma casa de cada vez, conforme a Figura 4. Quanto a captura o peão ataca na diagonal ficando no lugar da peça que foi atacada por ele (ver Figura 5), não podendo realizar capturas para trás.

Figura 4- Movimento dos Peões



Fonte: Autoria Própria

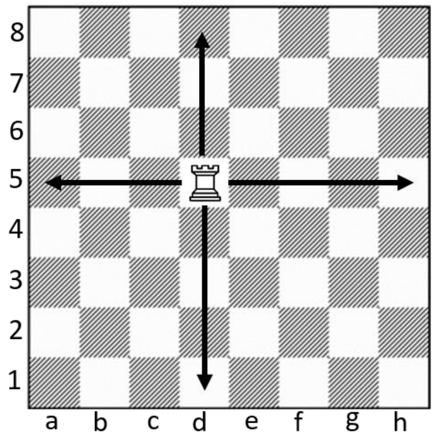
Figura 5- Captura dos peões



Fonte: Autoria Própria

A torre movimenta-se na vertical e horizontal de acordo com a visualização da Figura 6, este deslocamento da torre poderá ser realizado em quantas casas o jogador quiser, com exceção das casas que estiverem ocupadas pelas próprias peças, caso alguma peça do adversário esteja no raio de ação da torre, a captura poderá ser efetuada e a torre ocupará o lugar da peça tomada.

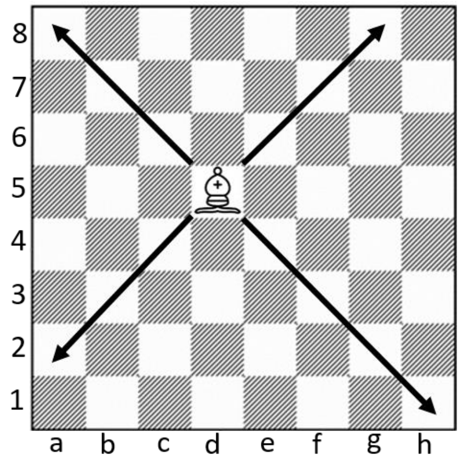
Figura 6- Movimento da Torre



Fonte: Autoria Própria

O bispo movimenta-se na diagonal quantas casas desejar, exceto se tal casa esteja obstruída por alguma peça própria, o bispo sempre atacará na diagonal e ocupará o lugar da peça adversária capturada (ver Figura 7).

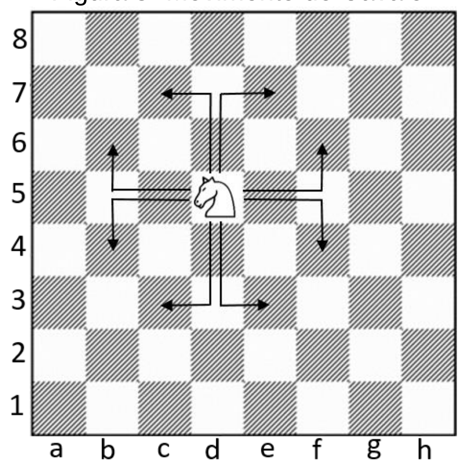
Figura 7- Movimento do Bispo



Fonte: Autoria Própria

O cavalo é a única peça do xadrez que pode pular as demais, o seu movimento consiste em um L, saltando duas casas e deslocando-se para direita ou esquerda da segunda casa como mostrado na Figura 8. O cavalo sempre captura a peça que estiver no final do L.

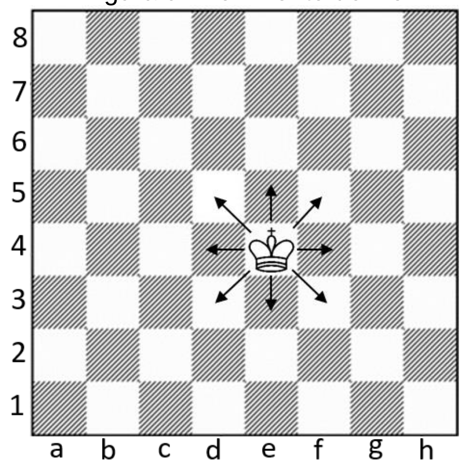
Figura 8- Movimento do Cavalo



Fonte: Autoria Própria

O Rei movimenta-se na vertical, horizontal e diagonal conforme é visualizado na Figura 9, no entanto, desloca-se apenas uma casa de cada vez. Quanto a captura, o rei poderá fazê-lo de acordo com a sua movimentação, mas nunca poderá capturar uma peça que esteja protegida por outra e nem se movimentar para uma casa que esteja sob ataque.

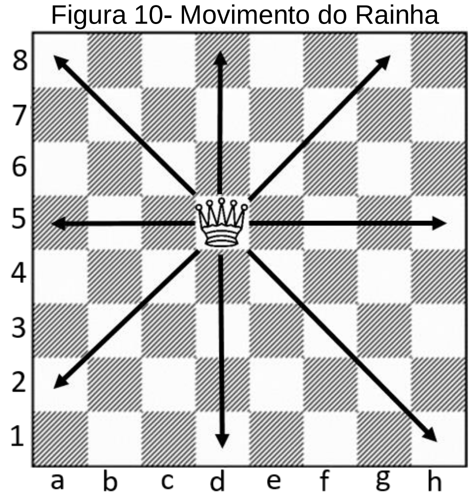
Figura 9- Movimento do Rei



Fonte: Autoria Própria

A Rainha também conhecida como Dama é a peça mais forte do jogo de xadrez, ela possui o movimento do bispo e da torre, podendo se deslocar na vertical, horizontal e na diagonal quantas casas desejar conforme ilustra a Figura 10, mas não pode pular nenhuma outra peça.

Figura 10- Movimento do Rainha



Fonte: Autoria Própria

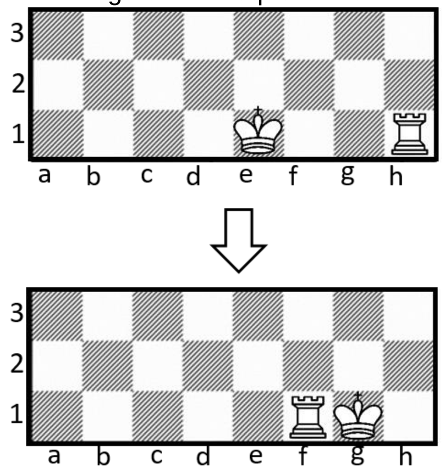
3.4 Movimentos Especiais

O *roque* é considerado um movimento de rei, e, portanto, o rei deve ser movido primeiro, caso o jogador tente iniciar o movimento pela torre o roque não poderá ser executado, e será considerado apenas um movimento de torre, o roque é um movimento especial onde é o único momento em que o rei anda duas casas, este lance é realizado com o intuito de proteger o rei e liberar a torre pro jogo (ver Figura

11). Existem também algumas especificações para que o *roque* possa ser realizado, ou seja:

- O rei e a torre não podem se mover até o momento da jogada.
- Não podem ter peças entre a torre e o rei obstruindo o caminho em que o roque será realizado.
- O rei não poderá está em xeque e nenhuma casa em que o rei irá passar durante a realização do roque poderá está sendo ameaçada.

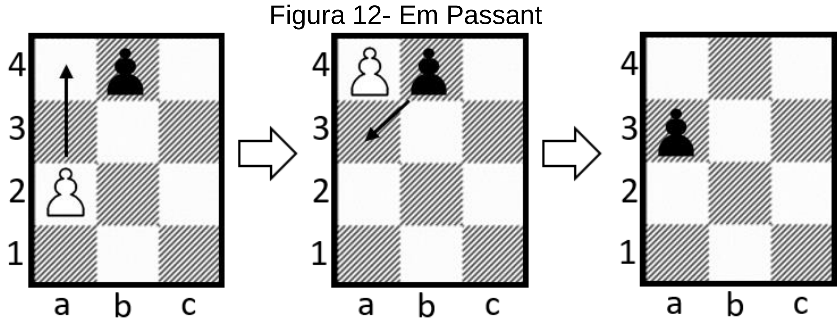
Figura 11- Roque Curto



Fonte: Autoria Própria

Em passant é um termo francês que significa na passagem, este movimento acontece quando um peão avança duas casas e fica no lado de um peão adversário, neste momento o peão que se encontra na quinta casa poderá efetuar a captura ficando na casa anterior a do peão capturado como mostra a Figura 12.

Figura 12- Em Passant



Fonte: Autoria Própria

4 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, será apresentada a base teórica que fundamenta o trabalho proposto, como a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica e os principais conceitos do conteúdo de Análise Combinatória: o fatorial, o princípio fundamental da contagem, arranjo, combinação e permutações.

4.1 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica

A soma nos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Demonstração:

De fato, seja $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Multiplicando por q, obte-sem: $qS_n = +a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1}$. E subtraindo, $qS_n - S_n = a_{n+1} - a_1$, e finalmente,

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \qquad (\mathbf{1})$$

4.2 Fatorial

Seja n um número natural, o fatorial de n é denotado por $n!$, para $n \geq 2$, (HAZZAN, 2004). Segue a expressão:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad (\mathbf{2})$$

Logo, o fatorial de n é formado pelo produto de todos os números naturais de 1 até n.

4.3 Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem ou princípio multiplicativo diz que se existe m maneiras de se tomar uma decisão D_1 e, se para cada uma dessas maneiras, há n modos de se tomar uma decisão D_2, então o número de maneiras diferentes de se tomar as decisões D_1 e D_2 de forma sucessiva é (LIMA et al. 2006):

$$m \cdot n. \qquad (\mathbf{3})$$

Um requisito importante para resolver problemas de Análise Combinatória é não adiar dificuldades, desta forma, as decisões que possuem uma maior restrição são aquelas que devem ser tomadas primeiro, caso contrário o problema se apresentará de forma mais complexa do que realmente é.

4.4 Permutações

Utilizando o princípio fundamental da contagem, é possível resolver qualquer problema de análise combinatória, no entanto, existem momentos que a melhor estratégia é aplicar determinados conceitos que ajudarão nas resoluções dos problemas, um dos exemplos é o uso da permutação, que se fará necessário quando o problema estiver relacionando a ordem. A palavra permutação está relacionada com o termo troca, por esta razão durante a resolução deste tipo de problema, ocorre a troca de posição dos elementos envolvidos.

4.4.1 Permutações Simples

Uma permutação simples de n elementos é uma fila destes elementos, e o termo simples significa sem repetição dos elementos permutados. Desta forma, é possível calcular o número de maneiras de se ordenar n objetos distintos em fila. Pois, a primeira posição da fila poderá ser escolhida de n maneiras entre os objetos, a segunda posição poderá ser escolhida de $n-1$ maneiras, e o objeto que ocupará a terceira posição será escolhido de $n-2$ maneiras e isso se repetirá até a escolha do objeto que ocupará a última posição, que se dará apenas de um modo. (LIMA et al. 2006). Portanto, a solução é da forma:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Logo, o número de permutações simples de n elementos distintos é denotado por:

$$P_n = n! \qquad (\mathbf{4})$$

Por meio da permutação simples é possível determinar anagramas de uma palavra. Anagrama é toda ordenação possível das letras de uma palavra, ainda que tal palavra não tenha significado.

4.4.2 Permutações com Repetição

É possível calcular também anagramas de um grupo onde há elementos repetidos, as chamadas permutações com repetição. Tomando como exemplo a palavra OSSO e calculando o número de anagramas como se todas as letras fossem diferentes, tem-se um total de:

$$P_4 = 4!$$

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \; anagramas$$

No entanto, este fato só será verdade se letras iguais com cores diferentes forem consideradas distintas, como mostra a Tabela 5.

Tabela 5- Anagramas da palavra OSSO

Anagramas da palavra OSSO					
OSSO	**OOSS**	**SOOS**	**SSOO**	**SOSO**	**OSOS**
OSSO	**OOSS**	**SOOS**	**SSOO**	**SOSO**	**OSOS**
OSSO	**OOSS**	**SOOS**	**SSOO**	**SOSO**	**OSOS**
OSSO	**OOSS**	**SOOS**	**SSOO**	**SOSO**	**OSOS**

Fonte: Autoria Própria

Desconsiderando as cores das letras da palavra OSSO, tem-se um total de 4 palavras sendo repetidas em 6 colunas (ver Tabela 5), isso acontece porque existe duas letra O que podem ser ordenadas de $P_2 = 2! = 2$ maneiras, de forma análoga acontece com as duas letras S. Deste modo, o número de anagramas idênticos em cada grupo pode ser obtido por $P_2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2 = 4$. Portanto, o número de anagramas distintos é:

$$\frac{P_4}{P_2 \cdot P_2} = \frac{24}{4} = 6 \; \blacksquare$$

Portanto, o número de permutações de n elementos dos quais um ou mais dentre eles são repetidos é denotado por (LIMA et al. 2006).:

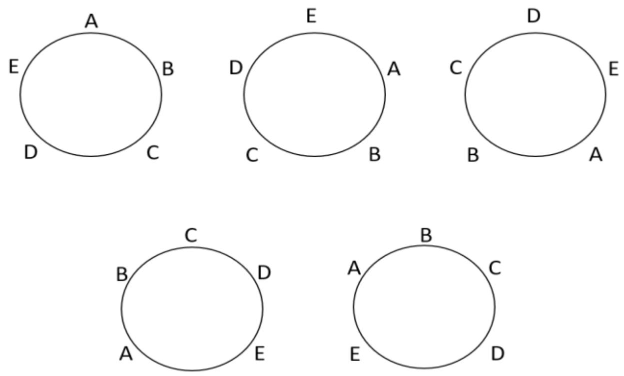
$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots.} = \frac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!\ldots} \qquad (\mathbf{5})$$

onde α, β, γ e assim sucessivamente, representam o número de vezes em que os elementos aparecem repetidos.

4.4.3 Permutações Circulares

É possível calcular o número de permutações de n elementos quando tais objetos estiverem dispostos de forma circular. Ver Figura 13.

Figura 13- Uma permutação circular



Fonte: Autoria Própria

Todas as disposições da Figura 13 podem ser obtidas por meio de uma rotação dos elementos, formando assim, uma única permutação circular. Se os elementos estivessem dispostos em fila, a solução se daria por meio de uma permutação simples gerando $P_5 = 5! = 120$ maneiras. No entanto, como cada disposição pode ser rotacionada de cinco formas, o número de permutações circulares, pode ser obtida dividindo-se o número de permutações simples por 5 (ROCHA, VASCONCELOS, 2019).

$$\frac{P_5}{5} = \frac{5!}{5} =$$

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5} = 24 \blacksquare$$

Utilizando o mesmo princípio, pode-se calcular o número de permutações circulares $(PC)_n$, para n elementos, dividindo o número de permutações simples por n, como segue:

$$(PC)_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n}$$

$$(PC)_n = (n-1)! \qquad (\mathbf{6})$$

4.5 Combinação Simples

A combinação simples é um tipo de agrupamento em que a ordem dos elementos envolvidos não influencia, por exemplo, considerando os elementos de $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, e formando conjuntos de 2 elementos, tem-se um agrupamento dos 7 elementos de A, tomados 2 a 2, em que a ordem não importa, ou seja, não é considerado um novo conjunto quando ocorre a mudança de posição dos elementos, exemplo: $\{1; 3\} = \{3,1\}$ (NETO, 1984).

A combinação de n elementos tomados p a p, pode ser denotada por C_n^p, $\binom{n}{p}$, ou ainda $C_{n,p}$. De modo geral, ao ser escolhido p elementos entre os n disponíveis, é formado um grupo com p elementos e outro grupo com $n-p$ elementos não escolhidos. Como o número de maneiras de se ordenar n elementos é dado por $n!$ e os outros dois grupos podem ser ordenados por $p!$ e $(n-p)!$ o número de combinações simples de n elementos tomados p a p é denotado por (MORGADO, CARVALHO, 2015):

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)} \qquad (7)$$

4.6 Arranjo Simples

Arranjo simples é um tipo de agrupamento em que a ordem dos elementos envolvidos influencia, onde uma nova configuração aparece toda vez que a ordem dos elementos é modificada. Tomando como exemplo o conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$, e formando números de 3 algarismos distintos, tem-se agrupamentos de 5 elementos de A, tomados 3 a 3, onde a ordem dos elementos deve ser levada em consideração, pois se for alterado a posição dos algarismos, o número acaba sendo modificado e uma nova configuração surge (NETO, 1984):

$$123 \neq 321 \neq 213$$

De modo geral, quando é escolhido p elementos entre n elementos disponíveis e tais elementos são ordenados, tem-se um caso de arranjo simples de n elementos tomados p a p, onde a quantidade de maneiras de se escolher p entre os n elementos envolvidos é dado por $C_{n,p}$, e a quantidade de maneiras de se ordenar os p elementos obtidos é dado por $p!$. Logo número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é denotado por: (ROCHA, VASCONCELOS, 2019).

$$A_n^p = C_n^p \cdot p!$$

$$A_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \cdot p!$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \tag{8}$$

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, serão abordados os conceitos, características e o modelo de sequência didática que será adotado no estudo de Análise Combinatória, também será descrito as etapas do processo durante a aplicação.

5.1 Conceito

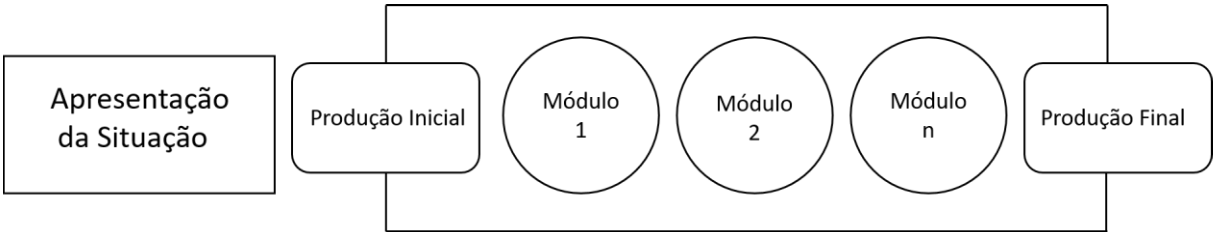
A sequência didática, segundo Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004, p.82) “é um conjunto de atividades escolares organizadas de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito.” Tais atividades são planejadas e combinadas de forma que atendam aos objetivos educacionais, onde o início e o fim são conhecidos pelos professores e alunos, desta maneira o processo de aprendizagem se torna mais eficiente. No geral a sequência didática possibilitará a reflexão sobre a prática docente por meio da observação do processo de ensino-aprendizagem, onde o professor poderá redefinir as suas ações com base no desenvolvimento e relação entre todos os participantes.

A sequência didática leva em consideração a faixa etária, o ano escolar e o nível dos alunos envolvidos, desta forma as atividades são organizadas e planejadas para que os mesmos possam obter uma aprendizagem significativa.

5.2 Modelo de Sequência Didática

O modelo de sequência didática adotado por Dolz et al. (2004), é dividido em quatro etapas conforme a Figura 14.

Figura 14- Esquema da Sequência Didática



Fonte: Adptado de Dolz, Noverraz e Schneuwly, 2004

Na primeira etapa, o aluno é apresentado ao objeto de estudo, tal como os recursos a serem utilizados pelo professor durante aplicação da sequência didática, as finalidades e o período do processo, na segunda etapa que é a produção inicial ocorre a avaliação diagnóstica que serve para verificação do nível e capacidade dos alunos referente ao assunto abordado, isso permitirá ao professor identificar os pontos em que precisará intervir e adaptar os módulos de acordo com a realidade dos alunos. Na terceira etapa, os problemas identificados na avaliação diagnóstica deverão ser trabalhados por meio de pesquisas e atividades além de recursos didáticos e aulas dinâmicas, a quarta etapa que é a produção final possibilitará ao aluno colocar em prática as noções aprendidas durante os módulos por meio de uma avaliação o que revelará os resultados obtidos por meio da sequência didática.

5.3 Local de Aplicação da Sequência Didática

A aplicação da sequência didática se dará na Escola de Educação Básica Agropalma que se localiza na PA-150, km 74 próximo ao município de Tailândia (ver Figura 15).

Figura 15- Localização da Escola Agropalma

Fonte: Google Maps

Trata-se de uma escola particular, que não possui fins lucrativos e é mantida pela Empresa Agropalma com o objetivo de atender aos filhos de funcionários. A empresa conta com cerca de cinco mil trabalhadores e é uma das principais produtoras de óleo de palma do país, algumas famílias residem dentro da própria vila da empresa, enquanto a maioria reside na vila Palmares que fica cerca de 5,5 km da Agropalma, e por este motivo os alunos se deslocam no ônibus escolar que é mantido pela empresa para que possam estudar na escola Agropalma.

A escola conta com onze salas de aulas todas climatizadas, laboratório de Ciências e Informática e atende a todos os níveis de ensino da educação básica, atualmente a escola dispõe de 348 alunos e adota o Sistema de Apoio ao Ensino (SAE).

5.4 Descrição das Etapas de Aplicação

No primeiro momento, foi apresentado aos alunos da segunda série do ensino médio o tema do trabalho, que seria o estudo de análise combinatória com a utilização do jogo de xadrez organizado sob a sequência didática de Dolz et al.(2004). E para manter os cuidados com a saúde por conta da pandemia, foi permitido a participação de dez alunos, que foram escolhidos de forma voluntária para retornarem no contraturno e assistirem as aulas de análise combinatória, no entanto, houve a participação de apenas nove alunos devido às condições de saúde apresentadas por um dos voluntários. Segundo Pompeu (2009), o ensino do jogo de xadrez proporciona um momento lúdico na escola tornando os alunos críticos e participativos, sendo respeitados por todos. Desta maneira,

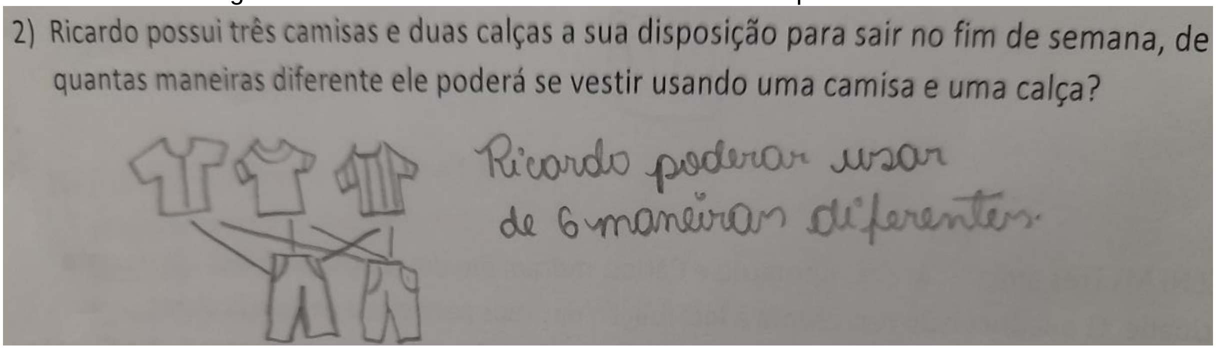
> O conceito de aprendizagem expresso pela evolução da Psicopedagogia e a importância dos jogos de regra na educação brasileira, propõe-se que o Jogo de Xadrez seja ministrado nas escolas, no Ensino Fundamental, de 5ª a 9ª séries. (POMPEU, 2009, P. 171)

Sendo assim, este conceito foi expandido para os alunos da 2ª série do ensino médio por meio da análise combinatória.

5.4.1 Avaliação Diagnóstica

Na etapa de produção inicial, os alunos realizaram uma avaliação contendo dez questões, com o objetivo de verificar o nível da turma com relação ao conteúdo de análise combinatória. Em uma das questões em que o tema abordado era o princípio fundamental da contagem (ver Tópico 4.3), a aluna A conseguiu resolver fazendo os desenhos dos objetos descritos no problema e traçando a árvore de possibilidades, o que mostra que apesar de não ter estudado o conteúdo até o momento, a aluna possui um conhecimento intuitivo registrado na Figura 16.

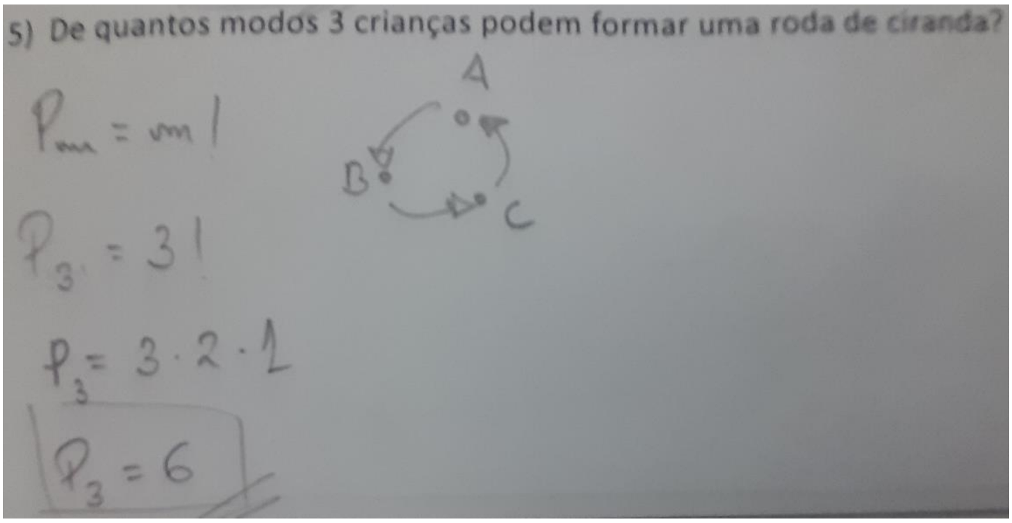
Figura 16- Conhecimento Intuitivo indicado na resposta da aluna A



Fonte: Autoria Própria

Em outra questão da avaliação diagnóstica, em que o tema tratado era permutação circular (ver Subtópico 4.4.3), o aluno B escreveu a fórmula e resolveu como se fosse uma permutação simples (ver Subtópico 4.4.1), no entanto, isso mostra que após a etapa da apresentação da situação, o aluno B estudou o conteúdo por conta própria, e por esta razão possuía um conhecimento prévio sobre o assunto, ainda que tenha se equivocado nos casos de permutações como mostra a Figura 17.

Figura 17- Conhecimento Prévio demonstrado na resposta do aluno B



Fonte: Autoria Própria

Naturalmente, houve muitas questões que os alunos não conseguiram resolver, por não estarem familiarizados com o conteúdo de análise combinatória, no entanto, o objetivo nesta etapa foi alcançado por revelar os pontos necessários a serem trabalhados nos módulos.

5.4.2 Desafio das 8 Torres e o Conceito de Fatorial

No início da aplicação dos módulos foi trabalhado um desafio de xadrez, que consiste colocar oito torres iguais em um tabuleiro sem que nenhuma esteja atacando outra, obedecendo o raio de ação das torres, de acordo com a Figura 6. Deste modo, os alunos foram divididos em grupos e começaram a encontrar algumas soluções para o problema proposto, ver Figura 18.

Figura 18- Uma Solução Possível

Fonte: Autoria Própria

Foi estipulado um tempo no qual os alunos tentaram encontrar o máximo de soluções possíveis, no fim do qual, os grupos conjecturaram o número de soluções que o problema poderia conter. O número máximo estipulado por eles foi igual a quarenta e o número mínimo foi igual a seis.

Em seguida, houve a intervenção do professor, com apenas perguntas sobre o número de possibilidades das posições das torres sobre cada linha do tabuleiro, tais questões levantadas foram rapidamente respondidas pelos alunos que chegaram ao resultado do problema. Pois a primeira torre terá oito maneiras de ser posicionada na primeira linha, enquanto a segunda torre terá uma posição eliminada no posicionamento referente a linha anterior e assim sucessivamente. Desta forma, a solução foi obtida pela definição de fatorial (ver Tópico 4.2) trabalhada de forma intuitiva, como segue:

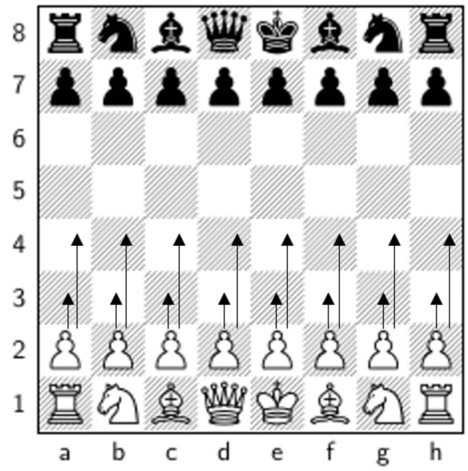
$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320 \ \blacksquare$$

Este desafio teve como objetivo preparar os alunos para as noções de fatorial e princípio fundamental da contagem. A partir deste ponto o conceito de fatorial foi apresentado, e os alunos fizeram menção ao problema das oito torres relacionando-o com o fatorial. Assim, os alunos partiram de conceitos que eles conheciam como o movimento das peças do xadrez para os primeiros conceitos de análise combinatória.

5.4.3 O Número de Shannon e o Princípio Multiplicativo

O princípio multiplicativo foi abordado por meio do número de Shannon. Este número é uma estimativa sobre a quantidade de movimentos que se pode realizar no xadrez, e foi calculado pelo matemático Claude Shannon. No início de uma partida de xadrez, as únicas peças que podem ser movidas são os peões e o cavalo, como são oito peões e cada um deles podem ser movidos duas casas, enquanto estiverem na casa inicial, tem-se dezesseis possibilidades para os movimentos dos peões, porque o jogador também poderá escolher que cada peão se mova apenas uma casa. O que é observado na Figura 19. (ROMAIS, 2021).

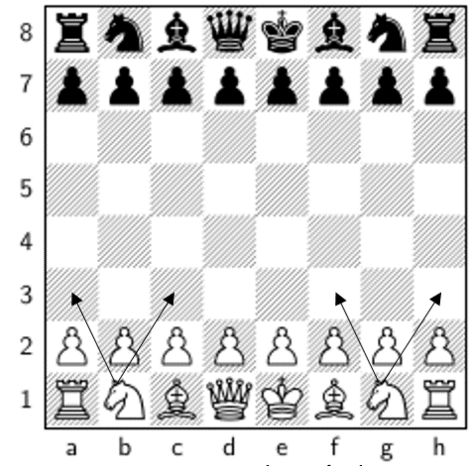
Figura 19- Possibilidades de Movimentos para os Peões



Fonte: Autoria Própria

No entanto, como o cavalo é a única peça que pode pular as demais, ele também pode ser movido, e cada cavalo terá a sua disposição duas casas para saltar. O que verifica-se na Figura 20.

Figura 20- Possibilidades de Movimentos para os cavalos



Fonte: Autoria Própria

Por tanto, quando todas as peças de xadrez estão nas suas respectivas casas iniciais, existe vinte possibilidades para que o jogador de brancas faça seu movimento; como um lance no jogo de xadrez é caracterizado por um movimento de brancas e pretas, segue que o número de possibilidades distintas é igual a quatrocentos, apenas para o primeiro lance da partida, uma vez que o jogador de brancas possui vinte possibilidades pra fazer o seu lance e o jogador de negras dispõe da mesma quantidade pra responder ao lance das brancas.

Foi calculado à risca a quantidade de movimentos possíveis até o segundo lance, que pode ser analisado pelo exemplo 1.

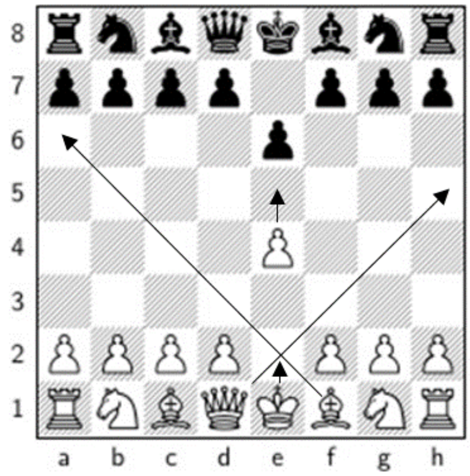
Exemplo 1.

Considerando que o lance inicial das brancas foi e4, ver movimentação dos peões na Figura 4, e as negras responderam com e5. Quantas possibilidades existem para o segundo movimento?

Solução:

Considerando a Figura 21 tem-se:

Figura 21- Posição após o 1º Lance



Fonte: Autoria Própria

Uma vez que o peão não esteja mais em e2 o bispo poderá jogar, ver Figura 7, e terá cinco possibilidades de movimento, enquanto a dama terá quatro, o rei e o cavalo também poderão se mover para e2. Considerando os movimentos dos peões, analisar Figura 19, e das demais peças que podem ser movidas nesta jogada, Figura 21, tem-se um total de trinta possibilidades tanto para as brancas quanto para as pretas. Sendo exatamente este número que o matemático Claude Shannon estimou. Ele também percebeu que em média uma partida de xadrez dura quarenta lances, e a cada jogada os jogadores dispõem de aproximadamente trinta movimentos (ROMAIS, 2021). Este número poder ser menor em determinados casos da partida, onde os jogadores poderão está jogando um final com poucas peças no tabuleiro, e até mesmo durante os momentos de xeque, onde os movimentos são restringidos com o intuito de defender o rei do ataque. No entanto, este número de trinta possibilidades por lance, também pode ser muito maior durante o meio jogo, onde os jogadores estão com todas as suas peças desenvolvidas. O que Claude Shannon fez foi estimar o número de possibilidades por meio de uma média. Desta maneira, tomando n como o número de Shannon e aplicando o princípio fundamental da contagem tem-se:

$$n = (30 \cdot 30)^{40}$$
$$n = (900)^{40} \blacksquare$$

Durante a realização do desafio sobre o número de Shannon uma pergunta foi levantada por um dos alunos sobre a operação que deveria ser realizada, e os demais alunos responderam que deveria se tratar da multiplicação, uma vez que já haviam acompanhado o desafio das oito torres e resolvido exercícios sobre fatorial, no entanto, o desafio sobre o número de Shannon serviu como base para os conceitos e exercícios sobre o princípio multiplicativo.

5.4.4 Xadrez 960 e o Princípio Fundamental da Contagem

O xadrez 960 é uma modalidade de xadrez que foi criada pelo americano Robert James Fisher (Bobby Fisher) em 1996, que consiste em permutar as peças da primeira e oitava linha obedecendo algumas regras, afim de que o jogo ficasse mais dinâmico e os jogadores se deparassem com posições nunca antes jogadas desde o início da partida. Isso porque como o xadrez convencional possui casas fixas para suas respectivas peças, os grandes mestres começaram a estudar a fundo as aberturas de xadrez, e vários nomes surgiram para identificar cada abertura, tornando o jogo um tanto previsível em seus primeiros movimentos. No entanto, o xadrez aleatório de Fisher possui 960 possibilidades de organização das peças, o que torna a memorização de aberturas neste formato praticamente impossível, estimulando a criatividade e o poder de cálculo durante as partidas (PEREIRA, 2021).

No xadrez 960 as peças ficam dispostas de tal forma com que os bispos fiquem sempre em casas de cores diferentes, e o rei se encontre sempre entre as duas torres, não necessariamente próximos, isso porque o rei poderá executar o roque para ambos os lados, assim como no xadrez convencional. Desta forma foi trabalhado com os alunos o número de possibilidade de organização das peças.

Como os bispos devem ficar em casas de cores distintas, deve-se começar os cálculos por eles, pois demonstram uma maior restrição, sendo assim, haverá quatro possibilidades pra se colocar cada bispo no tabuleiro. Considerando uma possível disposição dos bispos mostrado na Figura 22, tem-se:

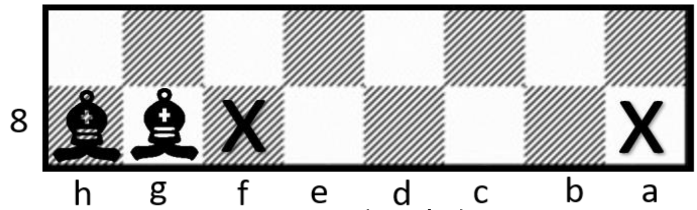
Figura 22- Posição dos Bispos

Fonte: Autoria Própria

$$4 \cdot 4 = 16 \quad \text{(I)}$$

Em seguida, deve-se colocar o rei, no entanto como o monarca deve ficar sempre entre duas torres, o rei não poderá ser colocado nas casas extremas identificadas pela letra **X** na Figura 23, restando assim quatro possibilidades pra ser colocado no tabuleiro.

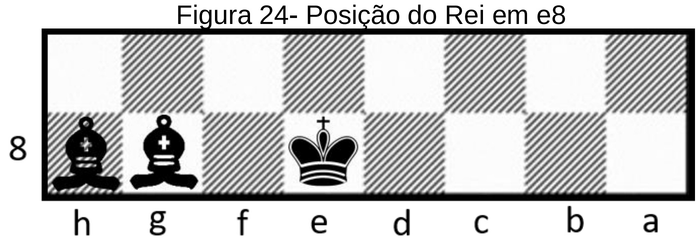
Figura 23- Posições que o Rei não pode ocupar



Fonte: Autoria Própria

Se o rei for colocado na casa de e8, como mostra a Figura 24, haverá apenas uma possibilidade de se colocar uma torre à esquerda do rei e quatro possibilidades de se colocar uma torre à direita.

Figura 24- Posição do Rei em e8



Fonte: Autoria Própria

$$1 \cdot 4 = 4 \tag{II}$$

Considerando o caso em que o rei poderá ser colocado em d8 como registra a Figura 25, haverá duas possibilidades de se colocar uma torre à esquerda do rei e três possibilidades de coloca-la à direita, assim:

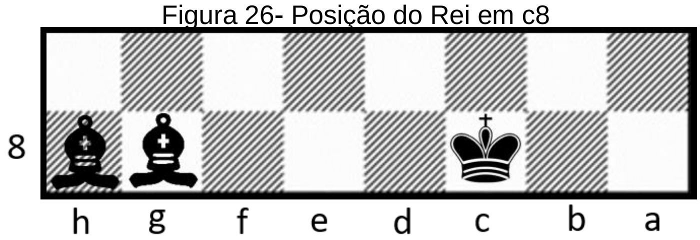
Figura 25- Posição do Rei em d8

Fonte: Autoria Própria

$$2 \cdot 3 = 6 \tag{III}$$

Admitindo-se a posição do rei em c8 de acordo com a Figura 26, haverá três possibilidades de se colocar uma das torres à esquerda do rei e duas possibilidades de se colocar a outra torre à direita, obtendo-se:

Figura 26- Posição do Rei em c8

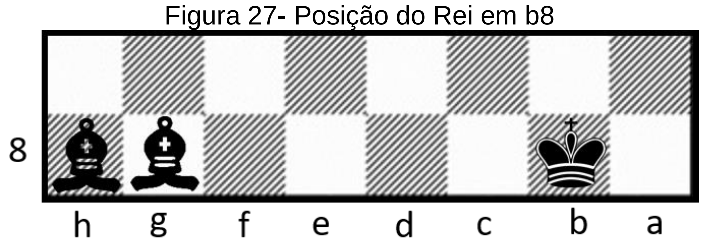


Fonte: Autoria Própria

$$3 \cdot 2 = 6 \qquad \text{(IV)}$$

O último caso da posição do rei é quando ele estiver em b8, o que pode ser observado na Figura 27, onde haverá quatro possibilidades de se colocar uma torre à esquerda do rei e uma única possibilidade de se colocar outra torre à direita, ou seja:

Figura 27- Posição do Rei em b8



Fonte: Autoria Própria

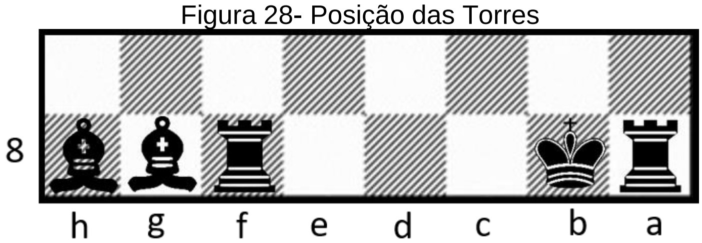
$$4 \cdot 1 = 4 \qquad \text{(V)}$$

Logo o total de possibilidades de se colocar o rei entre duas torres é dado pela soma dos resultados (I), (II), (III) e (IV), como segue:

$$4 + 6 + 6 + 4 = 20 \qquad \text{(VI)}$$

Uma vez que os bispos, as torres e o rei estejam posicionados no tabuleiro, restará três possibilidades de se colocar a dama, ver Figura 28.

Figura 28- Posição das Torres

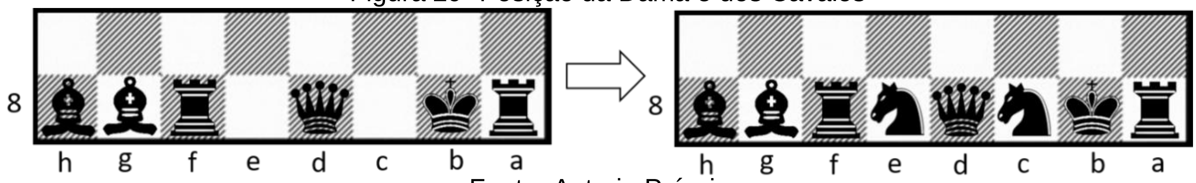


Fonte: Autoria Própria

$$Dama = 3\ possibilidades \qquad \text{(VII)}$$

E uma vez que a dama esteja posicionada no tabuleiro, haverá apenas uma única forma de se colocar os cavalos como registrado na Figura 29, pois ainda que os cavalos sejam permutados entre si isso não gera uma nova disposição das peças, pois os mesmo são iguais (PEREIRA, 2021).

Figura 29- Posição da Dama e dos Cavalos



Fonte: Autoria Própria

$$Cavalos = 1\, possibilidade \tag{VIII}$$

Logo, utilizando o princípio fundamental da contagem, o total de formas distintas que as peças podem ser organizadas é dada pelo produto de (I), (VI), (VII) e (VIII):

$$16 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 1 = 960 \blacksquare$$

5.4.5 Permutações e Xadrez

O conceito de permutação simples, foi trabalhado inicialmente por meio de uma fila indiana formada por três peças distintas do jogo de xadrez, como pode ser observado na Figura 30.

Figura 30- Fila Indiana das Peças

Fonte: Autoria Própria

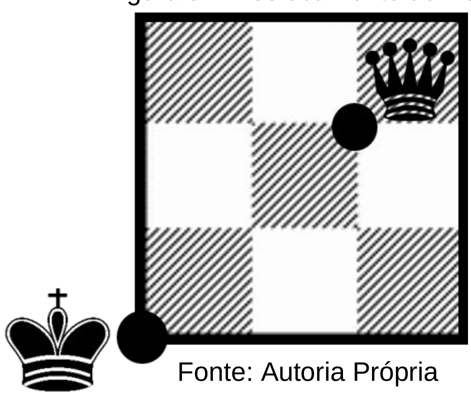
Este desafio foi realizado em dupla, e os alunos tiveram a incumbência de encontrar todas as formações possíveis para a fila, apenas trocando as peças de posições. Durante a realização do desafio os alunos trocavam as peças no tabuleiro e anotavam a nova configuração no caderno, desta forma todos os alunos conseguiram solucionar o problema. A partir daí, foi proposto uma fila com quatro peças distintas, no entanto, os alunos logo perceberam que a quantidade de resultados possíveis seria bem superior ao exercício anterior, então os mesmo indagaram se existia uma forma rápida e eficiente de se encontrar o resultado, e os conceitos de permutação simples foram finalmente abordados juntamente com outros exercícios.

As permutações com repetição (ver Subtópico 4.4.2), também foram contemplados pelo jogo de xadrez, embora as peças se movimentem apenas nas suas respectivas casas, nada impede que sejam usadas de forma que se movimentem em linhas, com o intuito de gravar os ensinamentos das permutações com repetição; neste caso o rei foi utilizado, pois ele se movimenta em todas as direções apenas uma única casa. A rainha também foi utilizada em um espaço reduzido identificado pela Figura 31, para que os alunos pudessem conjecturar sobre o número de possibilidades existentes.

Exemplo 2.

Observando a Figura 31, de quantas maneiras o rei poderá chegar na posição da rainha sempre se deslocando para cima e para direita?

Figura 31- Deslocamento do Rei



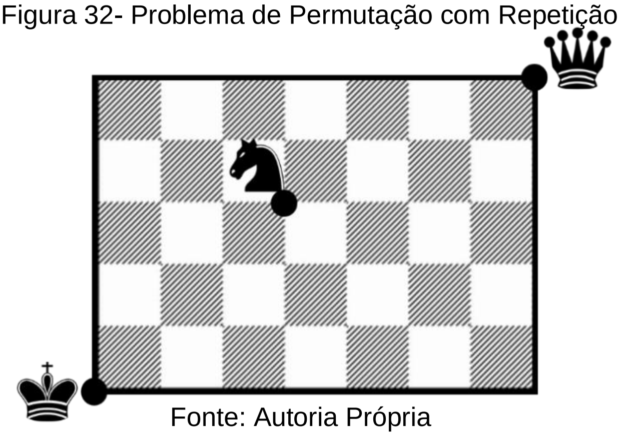
Fonte: Autoria Própria

Como as duas peças estão próximas, o exemplo 2 foi facilmente solucionado pelos alunos, uma vez que a quantidade de maneiras que o rei pode se deslocar pra chegar à rainha é baixa. Em seguida, a distância entre as duas peças foi aumentada e a necessidade de uma fórmula se fez presente, a partir deste ponto, os conceitos sobre permutação com repetição foram abordados, e os alunos usaram tais conhecimentos na resolução de problemas quando as peças se encontram muito afastadas uma das outras, e também quando aparece uma terceira peça no tabuleiro, o que pode ser observado pelo exemplo 3.

Exemplo 3.

Em um aplicativo de xadrez o rei se movimenta em linhas verticais e horizontais, ele precisa resgatar a sua rainha que está em outro reino de acordo com a Figura 32, para isso ele precisa do seu cavalo. Indo pelo caminho mais curto possível. Qual é o total de trajetos que podem ser seguidos?

Figura 32- Problema de Permutação com Repetição



Fonte: Autoria Própria

Como o rei terá que percorrer um caminho até o cavalo ele se deslocará três casas na vertical e horizontal, em seguida traçará um caminho do cavalo até a rainha e se deslocará quatro casas na horizontal e duas na vertical. Portanto, trata-se de duas permutações com repetições:

$$P_6^{3,3} \cdot P_6^{2,4} =$$

$$\frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{6!}{2!\,4!} =$$

$$\frac{6.5.4}{6} \cdot \frac{6.5}{2} =$$

$$20 \cdot 15 = 30$$

Logo, o total de trajetos que o rei poderá fazer é igual a 300■

As permutações circulares (ver Subtópico 4.4.3), foram inicialmente abordadas através da configuração de duas peças do xadrez: peão e cavalo, sendo que os peões em cada formação possuíam cores distintas. Foi colocado diante dos alunos quatro configurações formadas por tais peças como registra a Figura 33, os mesmos receberam a incumbência de descobrir qual das formações se diferenciava das outras sem ser obtida por meio de rotações das configurações anteriores.

Figura 33- Configurações na Permutação Circular

Fonte: Autoria Própria

Os alunos conseguiram solucionar o problema, e em seguida foi proposto que calculassem o número de maneiras possíveis de formações com apenas as peças apresentadas na Figura 33. Após este momento, considerou-se o movimento do cavalo (ver Figura 8), onde cada aluno posicionou uma peça distinta em uma possível casa de salto do cavalo, o que permite com que as peças estejam organizadas de forma circular o que pode ser analisado na Figura 34.

Figura 34- Permutação Circular a partir do movimento do Cavalo

Fonte: Autoria Própria

A partir da Figura 34, os conceitos de permutação circular foram inseridos, uma vez que não era possível solucioná-lo de forma intuitiva, como ocorreu na Figura 33. O problema de permutação circular obtido por meio do movimento do cavalo, de acordo com a Figura 8, também foi trabalhado de forma que algumas restrições foram inseridas, ver exemplo 4.

Exemplo 4.

De quantas formas as oito peças de xadrez representadas na Figura 34, podem ser colocados nas possíveis casas de salto do cavalo, de modo que o rei e a rainha branca nunca fiquem juntos?

Solução:

Calculando o total de permutações circulares:

$$PC_n = (n-1)!$$
$$PC_8 = (8-1)!$$
$$PC_8 = 7!$$
$$PC_8 = 5040$$

Calculando as permutações em que o rei e a rainha branca estejam sempre juntos:

$$PC_7 = (7-1)!$$

$$PC_7 = 6!$$
$$PC_7 = 720$$

No entanto, como o rei e a rainha branca podem ser permutados entre si, tem-se:

$$720 \cdot 2 = 1440$$

Logo o total pedido será:

$$PC = 5040 - 1440$$
$$PC = 3600 \blacksquare$$

5.4.6 Combinação Simples e Xadrez

A combinação simples (ver Tópico 4.5), foi apresentada por meio da escolha de duas entre três peças de xadrez, no qual os alunos teriam que descobrir todas as maneira possíveis de se fazer tal escolha, também foram informados que caso escolhessem as mesma peças e posicionassem em ordem diferentes, isso não configuraria uma nova formação de escolha. As peças envolvidas neste desafio inicial foi a torre, o rei e a rainha que se encontram na linha 6 (cor amarela), e os resultados encontrados pelos alunos se encontram na linha 2 (cor vermelho) como registrado na Figura 35.

Figura 35- Esquema Inicial de Combinação Simples

Fonte: Autoria Própria

Este exemplo inicial lançou base para as noções seguintes sobre combinação, tal como a utilização da fórmula e interpretação de problemas, no qual este princípio é utilizado. Alguns exercícios foram selecionados e trabalhados com os alunos, tal como o exemplo 5.

Exemplo 5.

(PUC-Rio) Um torneio de xadrez no qual cada jogador joga com todos os outros tem 351 partidas. O número de jogadores disputando é:

Solução:

Seja n o número de jogadores e 351 como o número total de combinações, neste sentido, utilizando (7) tem-se:

$$C_{n,2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$$

$$351 = \frac{n.\,(n-1).\,(n-2)!}{2(n-2)!}$$

$$351 = \frac{n.\,(n-1)}{2}$$

$$702 = n^2 - n$$

Resolvendo a equação quadrática e considerando n positivo, uma vez que não existem partidas negativas, tem-se:

$$n = 27\blacksquare$$

5.4.7 Arranjo Simples e Xadrez

Para a compreensão inicial de arranjo simples (ver Tópico 4.6), foi utilizado as mesmas peças sobre a explanação de combinação registrada na Figura 35. As diferenças estão no fato, de que os alunos posicionariam as peças nas linhas 1, 2 e

3, de acordo com a Figura 36, indicando uma ordem entre elas, desta maneira, peças diferentes colocadas sobre determinadas casas do tabuleiro alteram a formação das peças, criando uma nova configuração de escolha. A Figura 36 mostra todas as possibilidades de arranjo simples que foram montados pelos alunos a partir das três peças.

Figura 36- Configuração de Arranjos referente às 3 peças de xadrez

Fonte: Autoria Própria

No exemplo 6, foram trabalhados os princípios de arranjo envolvendo o tabuleiro de xadrez.

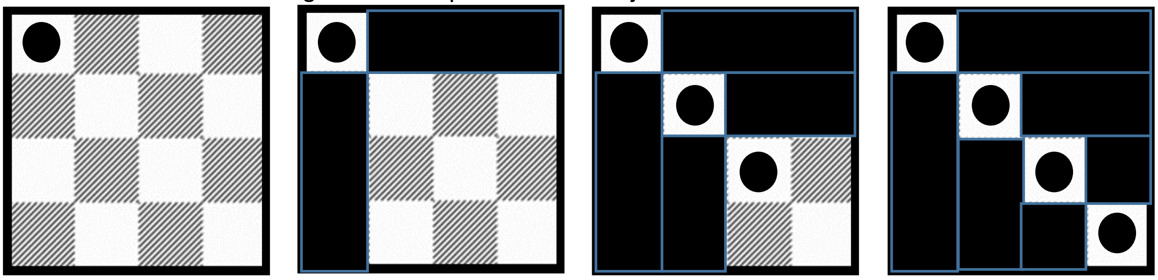
Exemplo 6.

Um tabuleiro especial de xadrez possui 16 casas dispostas em 4 linhas e 4 colunas. Um jogador deseja colocar 4 peças distintas no tabuleiro, de tal forma que, em cada linha e em cada coluna, seja colocada apenas uma peça. De quantas maneira as 4 peças poderão ser colocadas?

Solução:

Considere a Figura 37.

Figura 37- Esquema de Arranjo no tabuleiro 4 x 4



Fonte: Autoria Própria

Tomando como base as características da peça apresentada pela questão, pode-se concluí que se trata de quatro torres distintas, desta forma o seu movimento deve ser considerado de acordo com a Figura 6. Para a primeira peça ser colocada tem-se um arranjo, de dezesseis tomados um a um, pois tal peça poderá ocupar qualquer casa do tabuleiro no movimento inicial, para a segunda peça são arranjados nove casas tomada um a um, uma vez que a segunda peça não pode entrar no raio de ação da primeira, aplicando o mesmo raciocínio para terceira peça tem-se um arranjo de quatro tomados um a um, e quando a quarta peça for inserida no tabuleiro restará apenas uma possibilidade de ser colocada resultando num arranjo de um tomado um a um. O resultado final se dará pelo produto dos arranjos utilizando a formulação matemática (8), ou seja:

$$A_{16,1} \cdot A_{9,1} \cdot A_{4,1} \cdot A_{1,1}$$

$$16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = 576 \blacksquare$$

Neste caso, também pode ser utilizado de forma direta o princípio fundamental da contagem, pois a primeira peça dispõe de quatro linhas e quatro colunas para ser colocada, já a segunda peça vai dispor de três linhas e três colunas, e este princípio segue para as peças seguintes resultando em:

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$$

$$(4!)^2 = 576 \blacksquare$$

6 ANÁLISE DE RESULTADOS

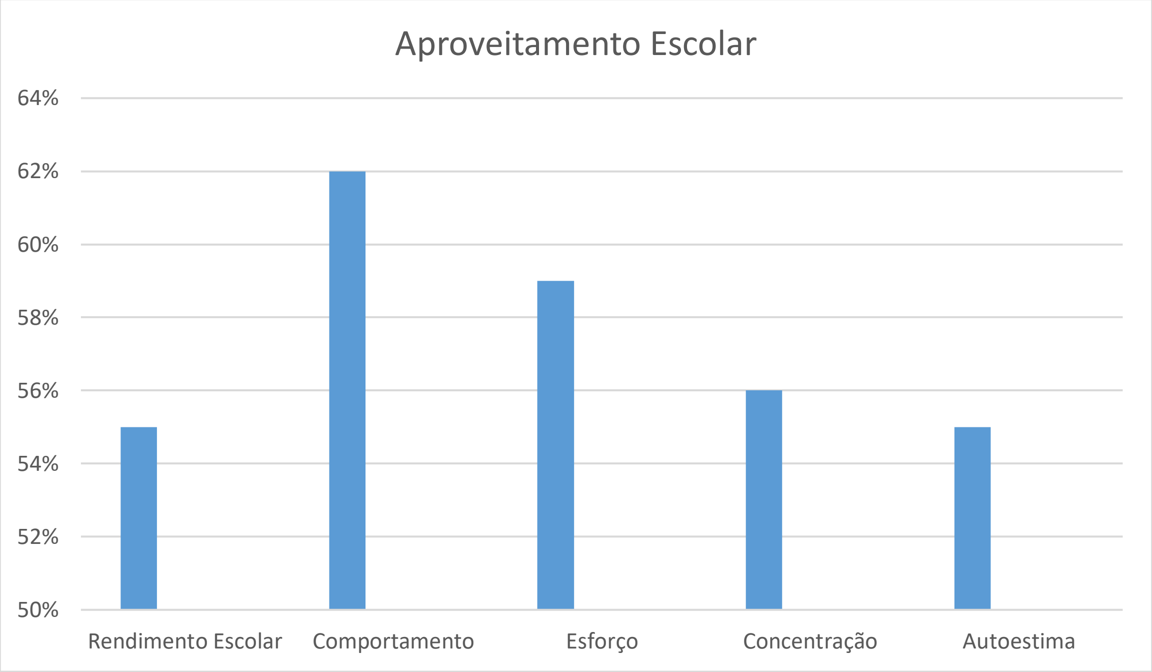
Neste capítulo, será realizado uma explanação sobre o desempenho dos alunos, após a aplicação da última etapa da sequência didática. Os resultados de experiências realizadas ao redor do mundo onde o jogo de xadrez fez parte do projeto pedagógico.

6.1 Resultados de Pesquisas

Muitas pesquisas e experiências já foram realizadas pelo mundo a fora sobre o impacto que o jogo de xadrez tem na educação. Todas elas têm apontado um melhor desempenho por partes das escolas que se utilizam deste recurso. Um exemplo disso, aconteceu na Bélgica em 1976, onde o Dr. Johan Christiaen realizou uma experiência com dois grupos de alunos com faixa etária entre dez e onze anos, a um grupo o xadrez foi inserido como fazendo parte do seu processo de ensino aprendizagem, enquanto o outro grupo recebia apenas o ensino regular. Após dois anos o Dr. Johan Christiaen constatou que o grupo que utilizava o xadrez como parte da sua metodologia, obtinha um aproveitamento de 13,5% superior ao outro.

Em 1981 na cidade de Nova York, Joyce Brown observou que a prática do xadrez levava a um melhor desempenho escolar de até 50% na maioria dos alunos, e também percebeu uma redução de até 60% dos casos de incidentes e suspensões. Em 1985 na Califórnia-USA, George Stephenson, realizou uma experiência e em apenas vinte dias constatou um melhor desempenho escolar por parte dos alunos. (REZENDE, 2013). Tal desempenho pode ser observado no Gráfico 1.

Gráfico 1- Aproveitamento Escolar da Pesquisa Realizada por George Stephenson.



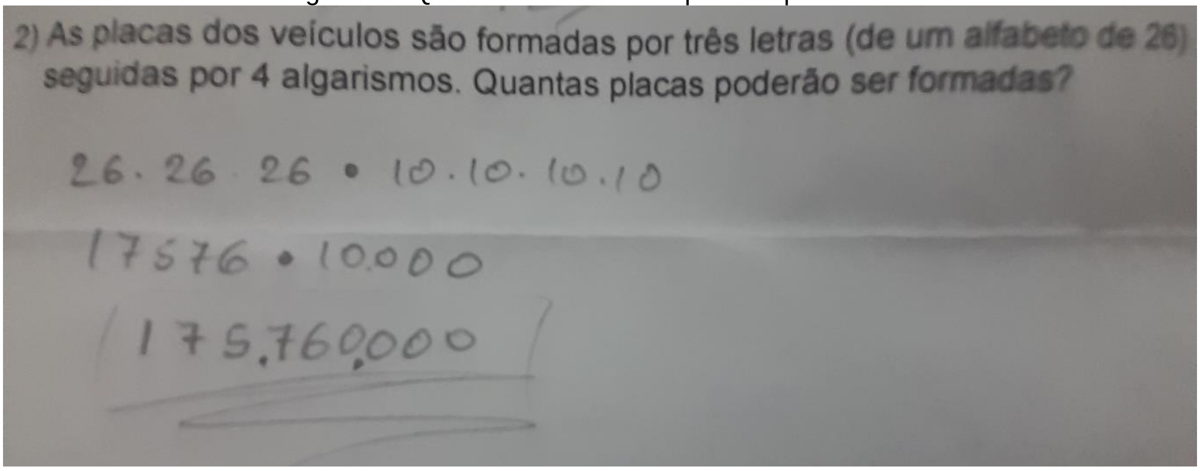
Fonte: Sylvio Rezende, 2013

6.2 Produção Final

Após a aplicação dos módulos, os alunos seguiram para última etapa, conhecida como produção final, onde os mesmos realizaram uma avaliação contendo dez questões, tais questões foram retiradas do Sistema de Apoio ao Ensino (SAE), Sistema de Ensino Positivo; do livro a Matemática do Ensino Médio vol. 2, de Lima et al. (2006), também foi selecionada uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e questões semelhantes as que foram trabalhadas em sala de aula.

Os alunos contaram com três horas para a realização da avaliação, e três questões que estavam no questionário diagnóstico foram repetidas na avaliação final, com o intuito de verificar o desempenho dos alunos. Uma das questões segue registrada na Figura 38.

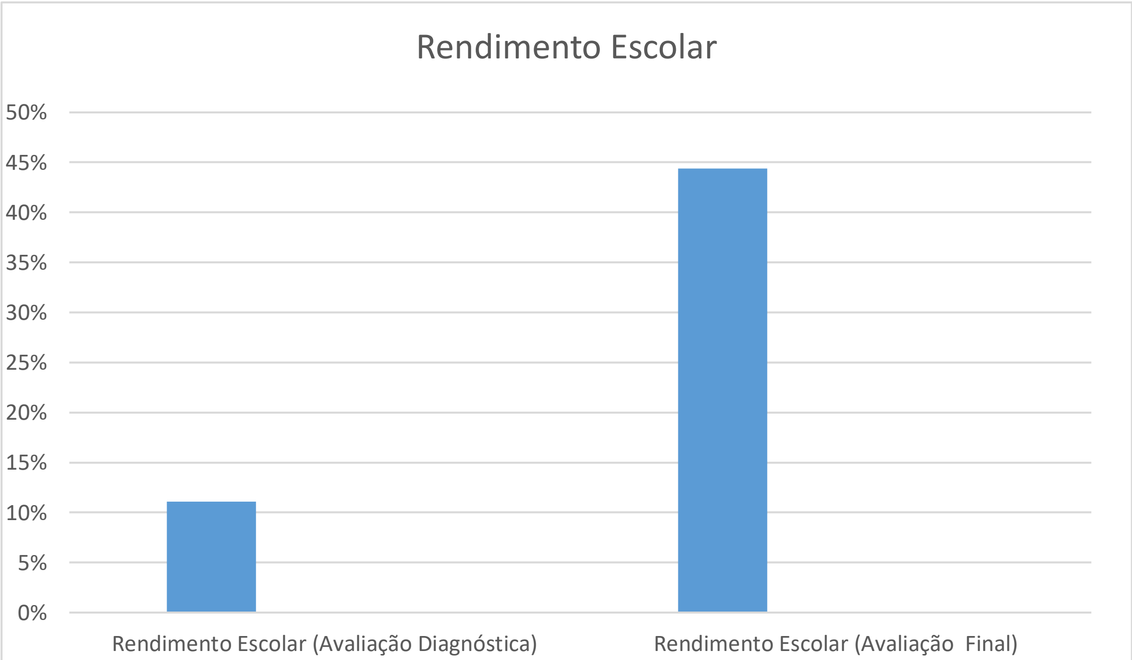
Figura 38- Questão sobre o Princípio Multiplicativo



Fonte: Autoria Própria

A questão da Figura 38, abordava o princípio multiplicativo, e percebeu-se que 22,2% dos nove alunos abordaram a questão de forma correta na avaliação final, mas se equivocaram no momento da realização dos cálculos. Diante do exposto, utilizando o indicador de rendimento escolar apresentado no Gráfico 1, traçou-se o rendimento escolar obtido na avaliação diagnóstica e avaliação final que pode ser analisado no Gráfico 2.

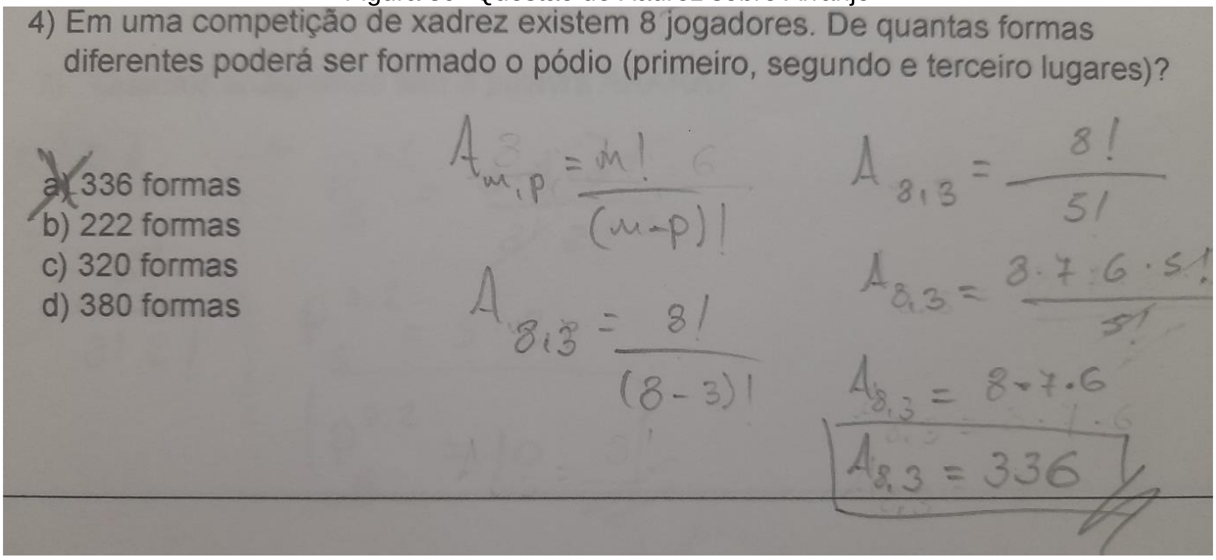
Gráfico 2- Desempenho dos Alunos Referente a Questão do Princípio Multiplicativo



Fonte: Autoria Própria

A Figura 39, mostra a segunda questão que esteve presente na avaliação diagnóstica e final.

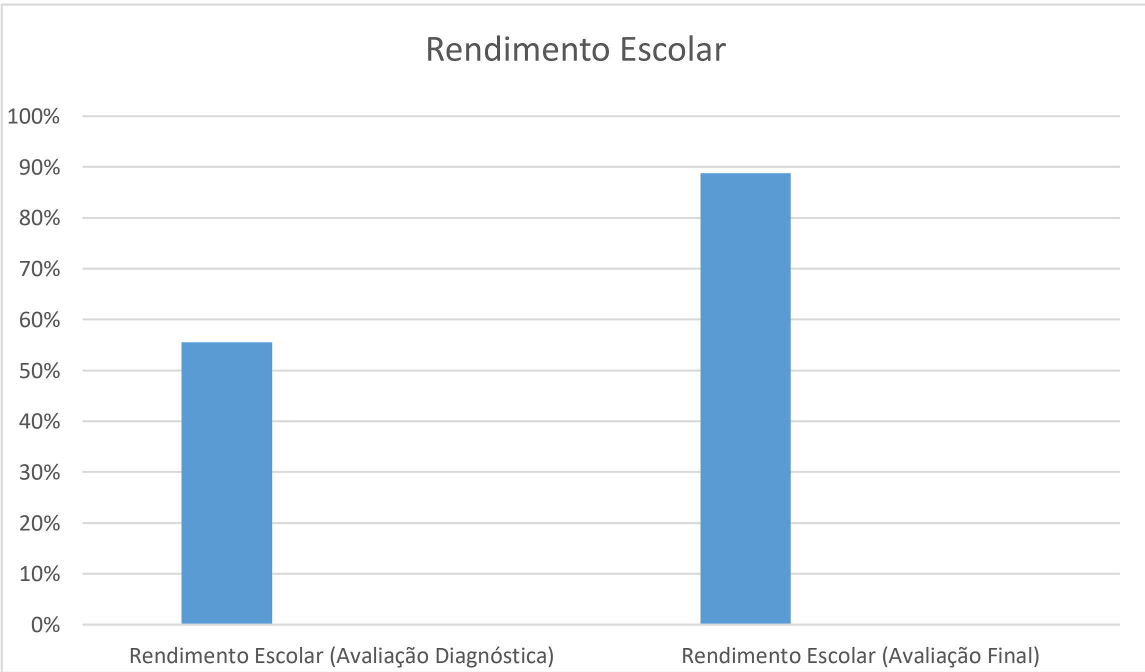
Figura 39- Questão de Xadrez sobre Arranjo



Fonte: Autoria Própria

Na Figura 39, foram trabalhados os conceitos de arranjo simples, e novamente foi utilizado o indicador de rendimento escolar visualizado no Gráfico 1, para registrar

Gráfico 3- Desempenho dos Alunos Referente a Questão de Arranjo Simples

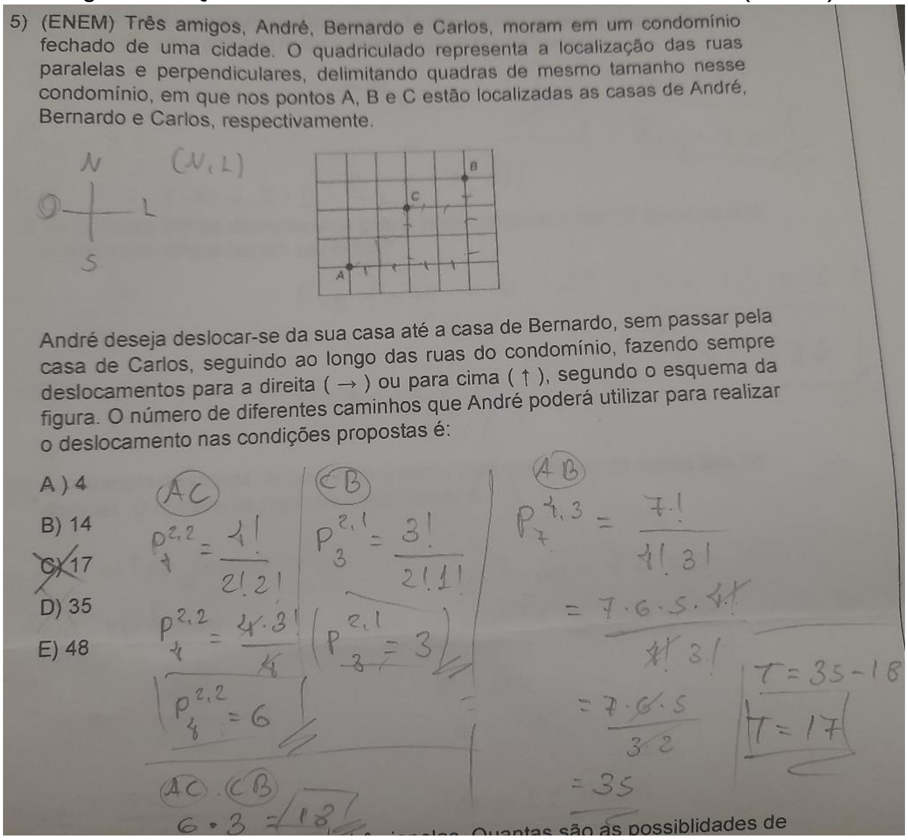


Fonte: Autoria Própria

o rendimento escolar da avaliação diagnóstica e final que pode ser observado no Gráfico 3.

A questão da Figura 40, resolvida pelo aluno B também constava nas duas avaliações; trata-se de uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o conceito envolvido é a permutação com elementos repetidos.

Figura 40- Questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)



5) (ENEM) Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.

André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita (→) ou para cima (↑), segundo o esquema da figura. O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é:

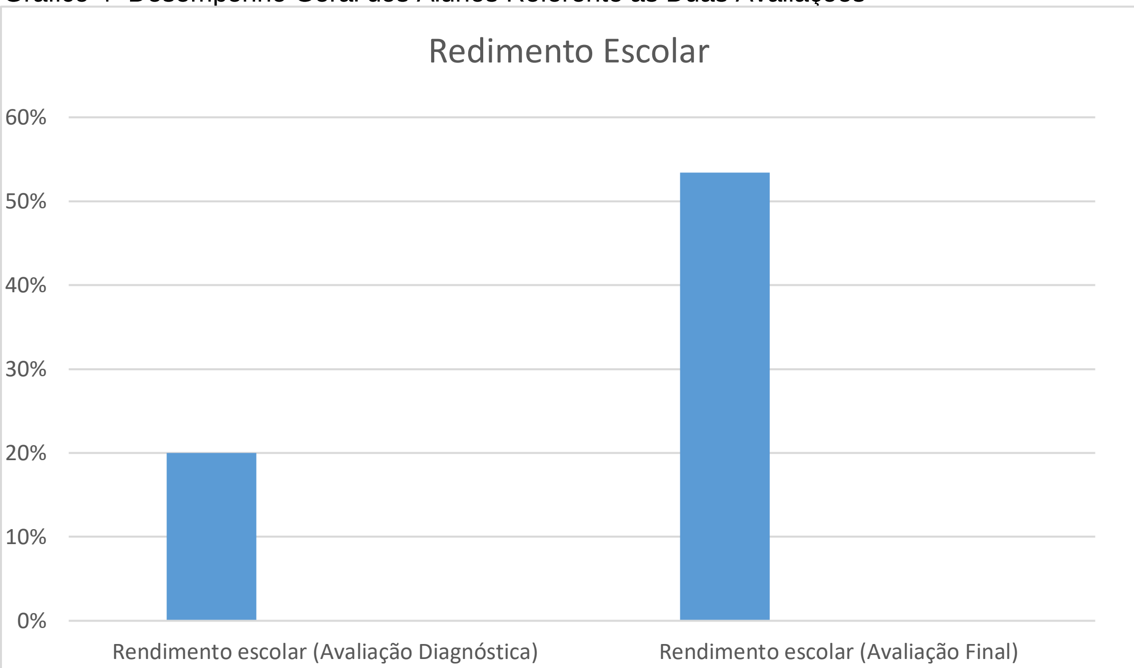
A) 4
B) 14
C) 17
D) 35
E) 48

Fonte: Autoria Própria

A questão da Figura 40, é considerada pelo Sistema de Apoio ao Ensino (SAE), como tendo grau médio de dificuldade, e foi resolvida de forma correta pelo aluno B. No entanto, embora apenas 22,2% dos alunos tenham conseguido acertar esta questão, isso ainda se torna um resultado favorável, por se tratar de uma questão que requeria uma certa destreza e experiência em sua resolução, o que poderia ser conseguido com um tempo de aplicação maior da sequência didática.

O Gráfico 4, mostra o rendimento escolar dos alunos referente às duas avaliações (diagnóstica e final) de forma geral, considerando todas as questões.

Gráfico 4- Desempenho Geral dos Alunos Referente às Duas Avaliações



Fonte: Autoria Própria

Observando o Gráfico 4, constatou-se um indicativo de evolução por parte dos alunos, e que os mesmos conseguiram absorver os principais conceitos de análise combinatória com a utilização do xadrez em cinco módulos, com tempo de duração de três horas. Totalizando sete encontros levando em consideração a avaliação diagnóstica e avaliação final.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho permitiu a aprendizagem de análise combinatória de uma forma lúdica, utilizando-se do jogo de xadrez como ferramenta educacional potencializando o aprendizado dos primeiros conceitos relacionados ao conteúdo abordado, permitindo uma melhor interação entre os alunos, de maneira que ambos buscassem realizar os desafios que lhe eram propostos de forma conjunta. O estudo de análise combinatória tem a sua importância não somente por se encontrar na grade curricular do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), como também por se firmar em vários artifícios de contagem que podem ser utilizados pelos alunos nas resoluções de problemas do cotidiano.

A sequência didática aplicada na escola Agropalma partiu de conceitos que os alunos já conheciam, uma vez que a escola promove um projeto de xadrez desde 2017, para conceitos de combinatória que os alunos precisavam adquirir, desta maneira as aulas tornaram-se instrutivas e dinâmicas facilitando a aprendizagem. No entanto, por conta de uma nova paralização das aulas em decorrência da pandemia, a aplicação da sequência didática teve seu tempo reduzido, e por este motivo os resultados não abrangeram um espectro estatístico maior, uma vez que os alunos não utilizaram um intervalo expandido entre um conceito e outro. De modo geral, dentro da atual conjuntura de aulas remotas em que os alunos estão inseridos, o resultado obtido a partir dos módulos presenciais foram satisfatórios e agregaram muito aos alunos, que foram participativos aprovando a utilização do jogo de xadrez, que não somente pode ser usado em análise combinatória, como também no plano cartesiano, em probabilidade, no conteúdo de simetria, no estudo inicial de fração, área e perímetro, potenciação, progressão geométrica entre outros. Diante deste fato, pretende-se realizar um estudo mais aprofundado, fortalecendo a relação dos conceitos apresentados sobre análise combinatória e xadrez, de maneira que possam ser aplicados a um número maior de alunos, e confrontar os resultados com turmas do ensino regular, que não se utilizam desta sequência didática para realização de suas aulas. A perspectiva é continuar com as pesquisas e aplicações, expandido a utilização do xadrez para outras áreas do conhecimento que compõem o Ensino Básico.

REFERÊNCIAS

ALEMANHA. 77º Congresso da FIDE, de 1 de Julho de 2009. Disponível em: http://www.cbx.org.br/files/downloads/Xadrez_lei_da_FIDE.pdf. Acesso em: 22 de Novembro de 2021.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. **Sequências didáticas para o oral e a escrita**: apresentação de um procedimento. São Paulo: Mercado das Letras, 2004

FIGUEIREDO, FILIPE. **História do Xadrez.** Youtube. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=6mBrbZSheuo. Acesso em: 01 de Ago. 2021.

HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática elementar:** combinatória, probabilidade. 3. Ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E.; CARVALHO, P, C, P; WAGNER, E; Morgado, A, C. **A Matemática do ensino médio**. 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MORGADO, A, C; CARVALHO, P, C, P. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NETO, A. **Matemática Básica.** São Paulo: Atual, 1984

PEREIRA, Paulo**. Xadrez 960- Saiba o porquê deste nome! Eu fiz as contas.** Youtube. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=aK1EyBj-g20&t=231s. Acesso em: 15 de Ago. 2021.

POMPEU, E. **O Jogo de Xadrez na Escola:** uma visão Psicopedagógica**.** Bauru, SP: [s.n.], 2009.

REZENDE, S. **Xadrez na escola:** uma abordagem didática para principiantes. 2. Ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2013.

ROMAIS, Rodrigo. **Matemática e Xadrez: O Número de Shannon.** Youtube. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=a29-zRA-0kM. Acesso em: 20 de Jul. 2021.

TASCHETTO, A. **O jogo de xadrez relacionado com a matemática.** 2004. 81f. Monografia (Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2004.

VASCONCELOS, C, B; ROCHA, M, A. **Matemática**: Análise Combinatória e Probabilidade. 3. Ed. Fortaleza: UECE, 2019.